

Olimpiada Națională de Matematică**Etapă locală****25 februarie 2023****Clasa a VI-a**

1. Se consideră mulțimea $A = \{2^n - n - 1 | n \in \mathbb{N}, n \leq 100\}$

a) Să se afle numărul elementelor mulțimii A .

b) Arătați că $1013 \in A$ și $2023 \notin A$.

c) Găsiți trei valori ale lui n pentru care $2^n - n - 1$ este divizibil cu 10.

2. Aflați numerele naturale nenule a și b știind că:

$$a \cdot (a, b) + b \cdot [a, b] = 2023$$

3. Știind că numărul prim \overline{ab} divide numărul $x = 4^{1013} + 8^{675} + 256^{253} + 2^{2023} + 64^{337}$, arătați că numărul \overline{ba} divide pe $31^{4n^2+4n+1} - 18$.

(S.G.M.)

4. Pe cercul $C(O, r)$ se consideră punctele A, B, C, D, E, F , în această ordine, astfel încât măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}$ să fie direct proporționale cu numerele 4, 7 și 6, iar măsurile unghiurilor $\widehat{COD}, \widehat{DOE}, \widehat{EOF}$ și \widehat{FOA} invers proporționale cu numerele 0,1(6), 0,(5), 5 și 0,2.

a) Determinați măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOE}, \widehat{EOF}$ și \widehat{FOA}

b) Dacă semidreapta OM este bisectoarea $\sphericalangle AOB$, $M \in C(O, r)$ și semidreapta ON este bisectoarea $\sphericalangle COD$, $N \in C(O, r)$ verificați dacă MN este diametru în $C(O, r)$.

Notă: Fiecare subiect este notat cu 7p.

Timp de lucru 2 ore.